

### Exercice 8

a) Résoudre l'équation retardée suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre l'équation retardée suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t-1) + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

c) Résoudre l'équation retardée suivante:

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t-1) + x(t-2) - 1 = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

### Exercice 9

Soient  $p \mapsto a(p)$  et  $p \mapsto b(p)$  deux fonctions telles que

$$a(p) e^{-sb(p)} = \text{Laplace}(g(t,s))(p)$$

et une fonction  $f$  de transformée de Laplace  $F$ .

1) Montrer que 
$$\mathbf{1} \left( \int_0^\infty f(s) g(t,s) ds \right) = F(b(p)) a(p)$$

2) Montrer que si  $a(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$  et  $b(p) = \sqrt{p}$ ,  $g(t,s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)$ .

En déduire l'original de  $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$

3) Montrer que si  $a(p) = \frac{1}{p}$  et  $b(p) = \frac{1}{p}$ ,  $g(t,s) = I_0(2\sqrt{t})$ . En déduire l'original de  $\frac{F(\frac{1}{p})}{p}$ .

En déduire la formule

$$\int_0^\infty I_0(2\sqrt{st}) \cos s ds = \sin t$$

$I_0$  est la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre 0 (solution de  $x^2 y'' + xy' - (x^2 + 0^2)y = 0$ ).